1. cvičení - Opakování středoškolské matematiky

6. 10. 2022

✈ = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Najděte řešení rovnic pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

a. $\log_{10} x = 3$

b. $2^x = \frac{1}{2}$

c. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d. ✈ $\log_{10} x + \frac{4}{\log_{10} x} = 4$

e. $4\cos^2 x + 3 = 8\cos x$

f. $3 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x = 3$

g. ✈ $\sin 2x = \cos x$

h. ✈ $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$

i. $e^x + 12 \cdot e^{-x} = 7$

Příklad 2. Najděte řešení nerovnic pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

a. $(x-2)(x+3) \geq 4x - 8$

b. $\frac{2x^2+1}{x^2+2x+2} < 1$

c. $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$

d. ✈ $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$

e. $\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2}$

f. ✈ $||x-1|-2| < 1$

g. $|2x+3| + |2x+5| > |x-1|$

h. ✈ $|x+2| > |x+1| + x$

i. $|x+1| - |x+3| < 1$

j. $|x + |x+2|| < 4x$

k. $x^2 + 1 - |x+2| > 0$

l. ✈ $\log_2(x^2 + |x+6| - 1) > 0$

m. $\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 3) \leq 0$

Příklad 3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ najděte řešení nerovnic pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

a. $|x(x+2)| > a$

b. ✈ $||x|-2| < a$

c. $|x^2 + 2x| < a + 2x$

d. ✈ $a(a-1)x < 2^{2137} - 1$

e. $x^2 + ax < 0$

f. $|x| + |x+1| < a$

g. $1 \leq |ax+1| < 2$

h. ✈ $\frac{a}{x} - \frac{4}{ax} = 1 - \frac{2}{a}$

i. $a \cdot x^2 + 2x - a + 2 = 0$

Příklad 4. Načrtněte grafy funkcí:

a. ✈ $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$

b. $f(x) = |\frac{3x+1}{2x-4}|$

c. $f(x) = |\sin(2-x) - 1|$

d. $f(x) = |\log|x-1||$

e. ✈ $f(x) = 1 - |\sin 2x|$

Příklad 5. Vyjádřete pomocí násobků $\sin x$ a $\cos x$ (a jejich mocnin):

a. $\sin 4x$

b. $\cos 8x$

Příklad 6. Dokažte následující tvrzení (budeme dělat příště):

a. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$.

b. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

c. Kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ nalezneme pomocí vzorce $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.